

Θέματα πανελλαδικών εξετάσεων που επιλύονται με ύλη έως και τα όρια συναρτήσεων

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

1996

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

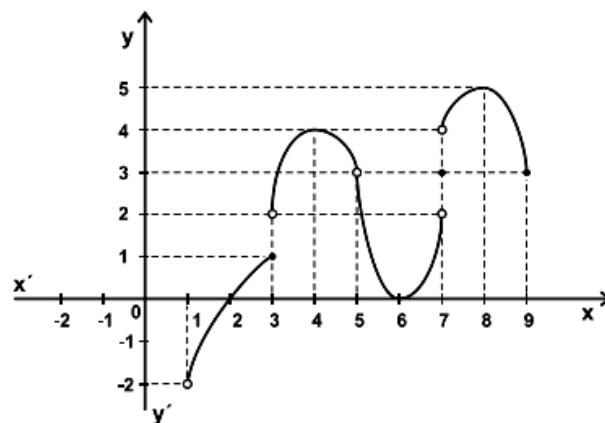
i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$



2016

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

B2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

B3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

B4. Έστω η συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4}$.

2020

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

B2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες.

B3. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right)$.

2020

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

B4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος γ, να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

2020

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$ και συνάρτηση

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

A1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Επαναληπτικές 2021

7. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

B2. i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$.

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1 + x^2)}{f(x)}$.

2023

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln(2 - x) - \frac{1}{x} + \kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

A1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

2023

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ και η

συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η

$$\text{συνάρτηση } f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2, x < 0.$$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g \circ f^{-1}$ είναι $h(x) = \frac{x-1}{x}$, $x < 0$.

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-h(x)} \eta \mu \frac{1}{x} \right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος B2.

Επαναληπτικές 2021

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $\alpha = 3$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{\ln(f(x) - x)}$.

Επαναληπτικές 2025

Στέλιος Μιχαήλογλου

Ασκησίοποις